Univerzitet u Zenici
Filozofski fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 28.09.2015.

Linearna algebra, pismeni ispit

1. Neka je $\mathcal{V}$ vektorski prostor svih matrica oblika 2×2 nad poljem realnih brojeva. Neka je $\mathcal{W}_1$ skup matrica oblika

$$\begin{pmatrix} x & -x \\ y & z \end{pmatrix}$$

a neka je $\mathcal{W}_2$ skup svih matrica oblika

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix}$$

(a) Dokazati da su $\mathcal{W}_1$ i $\mathcal{W}_2$ potprostori od $\mathcal{V}$.
(b) Odrediti bazu i dimenziju od $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{W}_2$, $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ i $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$.

2. Linearni operator $T : \mathcal{V}^2(0) \longrightarrow \mathcal{V}^2(0)$ dat je svojom matricom

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

u bazi $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ gdje je $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$.

(a) Odrediti matricu operatora T u kanonskoj bazi $\{\vec{i}, \vec{j}\}$;
(b) Odredite sve vektore $\vec{v} \in \mathcal{V}^2(0)$ takav da su vektori $\vec{v}$ i $T(\vec{v})$ okomiti.

3. U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^4$, sa standardnim skalarnim proizvodom, zadan je potprostor $\mathcal{M}$ razapet vektorima $(2, 1, 0, 0)^\top$, $(1, 1, 1, 1)^\top$. Nađite jednu bazu za ortogonalni komplement od $\mathcal{M}$ te odredite ortogonalnu projekciju vektora $a = (3, -4, 5, -5)^\top$ na $\mathcal{M}$.

4. Odrediti spektar matrice

$$B = A^3 + 3A^2 - A + 4I$$

gdje je

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 10 & -10 \\ -6 & 8 & -6 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ustanoviti može li se matrica B dijagonalizirati i je li regularna? (Prisjetimo se: spektar matrice sačinjavaju svojstvene vrijednosti matrice, zajedno sa njihovim algebarskim višestrukostima).

Važno: Ovaj papir treba predati zajedno s rješenjima zadataka! Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka. Svaku formulu koju mislite koristit, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije predavanja rješenja numerišite svaku stranicu brojem oblika: broj-stranice/broj-strana...

(#) Neka je V vektorski prostor svih matrica oblika 2×2 nad poljem realnih brojeva. Neka je W_1 skup matrica oblika

$$\begin{pmatrix} x & -x \\ y & z \end{pmatrix}$$

a neka je W_2 skup matrica oblika

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix}$$

(a) Dokazati da su W_1 i W_2 podprostori od V.

(b) Odrediti bazu i dimenziju od W_1, W_2, $W_1 + W_2$ i $W_1 \cap W_2$.

Rj:

(a) Prema definiciji, W je podprostor vektorskog prostora V akko je W neprazan skup i ako vrijedi

(A1) $A, B \in W \Rightarrow A + B \in W$

(M1) $A \in W \Rightarrow \alpha A \in W$ za $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Imajući ovu tvrdnju na vidu, dokaz da su W_1 i W_2 podprostori je lagan, i ostavljamo ga za vježbu.

(b) $$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & -x \\ y & z \end{pmatrix} \middle| \; x,y,z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z \middle| \; x,y,z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Kako su ovi vektori linearni nezavisni baza za W_1 je $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ a dimenzija je 3.

Slično

$$\mathcal{W}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix} \middle| a,b,c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} b + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} c \middle| a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Kako su ovi vektori linearno nezavisni, baza za $\mathcal{W}_2$ je $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ a dimenzija je 3.

$$\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 = \{ W_1 + W_2 \mid W_1 \in \mathcal{W}_1 \text{ ili } W_2 \in \mathcal{W}_2 \}$$

Primjetimo da proizvoljnu matricu $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ možemo napisati kao

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & -a \\ c & d \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{W}_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & b+a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{W}_2}$$

$\Rightarrow$ dimenzija od $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ je 4, pa za bazu možemo uzeti npr. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ostalo je još da pronađemo bazu i dimenziju za $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$.

Označimo sa $\mathcal{W}_1'$ i $\mathcal{W}_2'$ skup koordinata prostora $\mathcal{W}_1$ i $\mathcal{W}_2$ u odnosu na standardnu bazu. Tada

$$\mathcal{W}_1' = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x,y,z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \ker \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathcal{W}_2' = \left\{ \begin{pmatrix} a\\ b\\ -a\\ c\end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c\in\mathbb{R}\right\} = \left\{ \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 \,\middle|\, \alpha_1+\alpha_3=0\right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} = \ker\left(\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\right)$$

$$\mathcal{W}_1' \cap \mathcal{W}_2' = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_1+x_2=0 \ ; \ x_1+x_3=0\right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} = \ker\left(\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}}_{=A}\right)$$

Baza za $\ker A$ su slobodni vektori iz općeg rješenja sistema $Ax=0$.

$\operatorname{rang} A = 2 = \operatorname{rang} \bar{A}$

$x_1+x_2=0 \Rightarrow x_2=-x_1$ $\qquad x_1=s$

$x_1+x_3=0 \Rightarrow x_3=-x_1$ $\qquad x_4=t$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s\\ -s\\ -s\\ t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ -1\\ -1\\ 0\end{pmatrix} s + \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} t$$

Baza za $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ je $\left\{\begin{pmatrix}1&-1\\-1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ a odatle slijedi da je $\dim(\mathcal{W}_1\cap\mathcal{W}_2)=2$.

Na kraju primijetimo da je zadovoljena formula

$$\underline{\dim(\mathcal{W}_1+\mathcal{W}_2) = \dim\mathcal{W}_1 + \dim\mathcal{W}_2 - \dim(\mathcal{W}_1\cap\mathcal{W}_2)}$$

$$4 \quad = \quad 3 \quad + \quad 3 \quad - \quad 2$$

Linearni operator $T: V^2(O) \to V^2(O)$ dat je svojom matricom

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

u bazi $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, gdje je $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$.

(a) Odrediti matricu operatora T u kanonskoj bazi $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

(b) Odrediti sve vektore $\vec{v} \in V^2(O)$ takve da su vektori $\vec{v}$ i $T(\vec{v})$ okomiti.

Rj:

Baze $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ i $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ označimo redom sa $\mathcal{S}$ i $\mathcal{B}$, tj.

$$\mathcal{S} = \{\vec{i}, \vec{j}\}, \quad \mathcal{B} = \{\vec{a}, \vec{b}\}$$

U zadatku je dato da je $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$

i ono što se u (a) traži od nas je da odredimo $[T]_{\mathcal{S}}$.

Prisjetimo se

Ako je T linearni operator na V, i ako su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ dvije baze za V, tada su matrice $[T]_{\mathcal{B}}$ i $[T]_{\mathcal{B}'}$ povezane na sljedeći način:

$$[T]_{\mathcal{B}} = P^{-1} [T]_{\mathcal{B}'} P$$

gdje je $P = [I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ matrica za promjenu baze sa $\mathcal{B}$ u $\mathcal{B}'$.

U našem slučaju

$$[T]_{\mathcal{S}} = P^{-1} [T]_{\mathcal{B}} P \quad \text{gdje je} \quad P = [I]_{\mathcal{S}\mathcal{B}}.$$

$$[I]_{\varphi\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} | & | \\ [\vec{i}]_{\mathcal{B}} & [\vec{j}]_{\mathcal{B}} \\ | & | \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \vec{a} = \vec{i} + \vec{j} \\ \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} \\ \hline \vec{b} - \vec{a} = \vec{i} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} \\ - \quad \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} \\ \hline 2\vec{a} - \vec{b} = \vec{j} \Rightarrow [\vec{j}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\vec{i} = -\vec{a} + \vec{b} \Rightarrow [\vec{i}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [I]_{\varphi\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{tj.} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{II_v + I_v}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{I_v - II_v \cdot 2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

$$\overset{I_v \cdot (-1)}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$1+0$
$5-8$

$$P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a ovo se tražilo da odredimo
u dijelu (a)

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$[T(\vec{i})]_{\varphi} = [T]_{\varphi}[\vec{i}]_{\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T(\vec{i}) = \vec{i} + \vec{j}$$

$$[T(\vec{j})]_{\varphi} = [T]_{\varphi}[\vec{j}]_{\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T(\vec{j}) = -3\vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} \Rightarrow [\vec{v}]_{\varphi} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$T(\vec{v}) = T(x\vec{i} + y\vec{j}) = x\,T(\vec{i}) + y\,T(\vec{j}) = x(\vec{i} + \vec{j}) + y(-3\vec{i} + \vec{j})$$

$$= (x-3y)\vec{i} + (x+y)\vec{j} \Rightarrow [T(\vec{v})]_{\varphi} = \begin{pmatrix} x-3y \\ x+y \end{pmatrix}$$

Trebamo odrediti $\vec{v}$ tako da $\vec{v} \perp T(\vec{v})$

tj. $$(x \quad y) \cdot \begin{pmatrix} x-3y \\ x+y \end{pmatrix} = 0$$

$$x^2 - 3xy + xy + y^2 = 0$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = 0$$

$$(x-y)^2 = 0$$

$$x = y$$

Svi vektori oblika $\vec{v} = x\vec{i} + x\vec{j}$ (gdje je $x \in \mathbb{R}$ proizvoljan) su okomiti na $T(\vec{v})$.

Provjera

$$\vec{v} = x\vec{i} + x\vec{j}$$

$$T(\vec{v}) = x(\vec{i} + \vec{j}) + x(-3\vec{i} + \vec{j})$$

$$= -2x\vec{i} + 2x\vec{j}$$

$$(x\vec{i} + x\vec{j})(-2x\vec{i} + 2x\vec{j}) =$$

$$= -2x^2\vec{i}^2 + 2x^2\vec{j}^2 = 0$$

#) U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^4$, sa standardnim skalarnim produktom, zadan je podprostor M razapet vektorima $(2,1,0,0)^T$, $(1,1,1,1)^T$. Nađite jednu bazu za ortogonalni komplement od M te odredite ortogonalnu projekciju vektora $a=(3,-4,5,-5)^T$ na M.

Rj.:

$$M = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Trebamo odrediti bazu za $M^{\perp}$. Prisjetimo se

Za podskup M unitarnog prostora V, ortogonalni komplement $M^{\perp}$ od M je definiran sa

$$M^{\perp} = \{x \in V \mid \langle m, x\rangle = 0 \text{ za } \forall m \in M\}$$

Mi tražimo $x = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$ t.d. $\left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\right\rangle = 0$ i $\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\right\rangle = 0$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$2a+b=0 \qquad\qquad a+b+c+d=0$$

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 2\end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow$$ dvije promjenjive, uzimamo proizvoljno npr. $c=t$, $d=s$

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t+s\\-2t-2s\\t\\s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}s$$

ovo je baza za $M^{\perp}$.

Time smo dobili $M^{\perp} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

Prisjetimo se

Vektor m se naziva ortogonalna projekcija od v na M akko $v = m + n$ gdje je $m \in M$ i $n \in M^{\perp}$.

Mi imamo

$$M = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \quad i \quad M^{\perp} = \left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Prvo odredimo $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ t. d.

$$\begin{pmatrix}3\\-4\\5\\-5\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \alpha = 1, \quad \beta = -1, \quad \gamma = 6, \quad \delta = -4$$

$$\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Ortogonalna projekcija vektora $a = \begin{pmatrix}3\\-4\\5\\-5\end{pmatrix}$ na M je $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

\# Odrediti spektar matrice

$$B = A^3 + 3A^2 - A + 4I$$

gdje je

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 10 & -10 \\ -6 & 8 & -6 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ustanoviti može li se matrica B dijagonalizirati i je li regularna?

Rj.

Jedan od načina za rješavanje ovog zadatka je da prvo odredimo matricu B, poslije čega ćemo provjeriti da li se B može dijagonalizirati. Ovaj pristup nije baš najpametniji pristup, s obzirom da prvo moramo izračunati A^3, pa $3A^2$ pa moramo odrediti zbir A^3+3A^2-A+4I, i tako dalje.

Mnogo praktičniji pristup je da dijagonaliziramo datu matricu A tj. da odredimo P t.d. $P^{-1}AP = D$ gdje je D dijagonalna matrica. ZAŠTO?

Primjetimo

$$B = A^3 + 3A^2 - A + 4I$$

$$P^{-1}BP = P^{-1}(A^3+3A^2-A+4I)P$$

$$P^{-1}BP = P^{-1}A^3P + 3P^{-1}A^2P - P^{-1}AP + 4P^{-1}IP$$

Kako je $P^{-1}A^2P = P^{-1}APP^{-1}AP = D \cdot D = D^2$

; $P^{-1}A^3P = P^{-1}A\underbrace{PP^{-1}}_{I}A\underbrace{PP^{-1}}_{=I}AP = D^3$

to je

$$P^{-1}BP = \underbrace{D^3 + 3D^2 - D + 4I}_{\text{ovo je dijagonalna matrica}}$$

Drugim riječima ako je matrica A dijagonalbilna tada je i matrica B dijagonalbilna. Treći pristup ovom zadatku je sljedeći – postavimo pitanje:
U kakvom su odnosu svojstvene vrijednosti matrica A i B?

Neka je λ svojstvena vrijednost matrice A, kojoj odgovara svojstveni vektor v. Tada $Av = \lambda v$.

$$A^2v = AAv = A(\lambda v) = \lambda Av = \lambda^2 v$$
$$A^3v = \lambda^3 v$$
$$Bv = (A^3 + 3A^2 - A + 4I)v = A^3v + 3A^2v - Av + 4Iv$$
$$= (\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda + 4)v$$

Time smo dobili da ako je λ svojstvena vrijednost matrice A, tada je $\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda + 4$ svojstvena vrijednost matrice B.
Kao i, ako je v svojstv. vektor matrice A, tada je v svojstveni vektor matrice B,

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -6-\lambda & 10 & -10 \\ -6 & 8-\lambda & -6 \\ -3 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} \overset{II_k + III_k}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} -6-\lambda & 0 & -10 \\ -6 & 2-\lambda & -6 \\ -3 & 2-\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} -6-\lambda & 0 & -10 \\ -6 & 1 & \cancel{-6} \\ -3 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \ldots = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-2)$$

$-1+3+1+4$
$8+12-2+4$

Svojstvene vrijednosti matrice A su $-1, 0, 2$ iz čega slijedi da su svojstvene vrijednosti matrice B $7, 4$ i 22.

Ostalo je još da proverimo da li su svojstveni vektori koji odgovaraju svojstvenim vrijednostima -1, 0 i 2 linearno nezavisni.
Neka su v_1, v_2 i v_3 svojstveni vektori koji odgovaraju svojstvenim vrijednostima -1, 0 i 2, redom.

Pretpostavimo da su v_1, v_2 i v_3 linearno zavisni i dobijmo kontradikciju

v_1, v_2, v_3 lin. zavisni $\Rightarrow$ $\exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ t.d. bar jedan od α_i je $\neq 0$ i

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \quad \ldots (I) \qquad / A \text{ sa lijeve strane}$$

$$\alpha_1 A v_1 + \alpha_2 A v_2 + \alpha_3 A v_3 = 0$$

$$-\alpha_1 v_1 + 0 \cdot \alpha_2 v_2 + 2\alpha_3 v_3 = 0$$

$$-\alpha_1 v_1 + 2\alpha_3 v_3 = 0 \quad \ldots (II)$$

v_1 i v_3 su svojstveni vektori a time oni su $\neq 0$ $\Rightarrow$ $\alpha_1 \neq 0$ i $\alpha_3 \neq 0$.
Izračunajmo sad $(II) - (I) \cdot 2$:

$$\begin{array}{rl} & -\alpha_1 v_1 + 2\alpha_3 v_3 = 0 \\ - & 2\alpha_1 v_1 + 2\alpha_2 v_2 + 2\alpha_3 v_3 = 0 \\ \hline & -3\alpha_1 v_1 - 2\alpha_2 v_2 = 0 \end{array}$$

Sad ako ovaj zadnji izraz pomnožimo sa A imamo

$$-3\alpha_1 A v_1 - 2\alpha_2 A v_2 = 0$$

$$3\alpha_1 v_1 = 0 \overset{v_1 \neq 0}{\Longrightarrow} \alpha_1 = 0$$

\# kontradikcija ($\alpha_1 \neq 0$)

Pretpostavka da su v_1, v_2 i v_3 linearno zavisni nas vodi u kontradikciju pa nije tačna.

Spektar matrice B je $spec(B) = \{4^1, 7^1, 22^1\}$.

Matrica B se može dijagonalizirati i matrica B jest regularna matrica.